

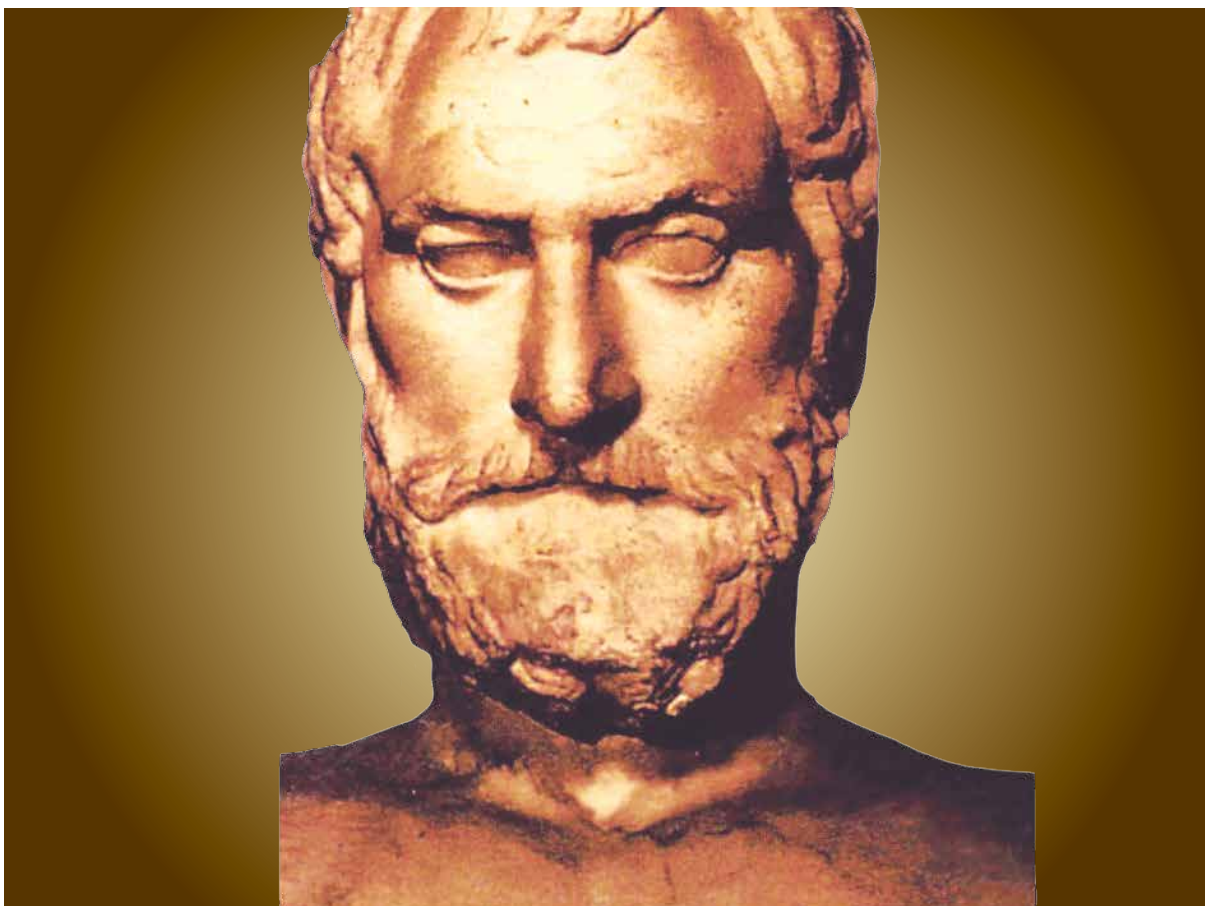
MATEMÁTICAS QUE CANTAN: LOS ORÍGENES

José Guerrero Grajeda

Música y ciencia tienen una relación más profunda y mucho más antigua de lo que te imaginas ¿Y quién podría negar que las matemáticas son tan bellas como la música?

La relación entre matemáticas y música en el contexto de la civilización de occidente —a la cual pertenecemos—, es bastante antigua y sus raíces podemos ubicarlas alrededor del siglo VI a. n. e., en una amplia región bañada por el mediterráneo (ver mapa), donde una serie de pensadores comenzaron a responder de forma novedosa a las preguntas por el origen y

la racionalidad de lo real, mismas que podemos enunciar como sigue: ¿de dónde surge la multiplicidad de seres y objetos que percibo por mis sentidos? y ¿qué es lo que explica la multiplicidad de fenómenos que observo? Los primeros de estos pensadores, —conocidos como filósofos presocráticos—, son: Tales, Anaximandro y Anaxímenes, originarios de Mileto, para quienes no se trata ya



■ Tales de Mileto.



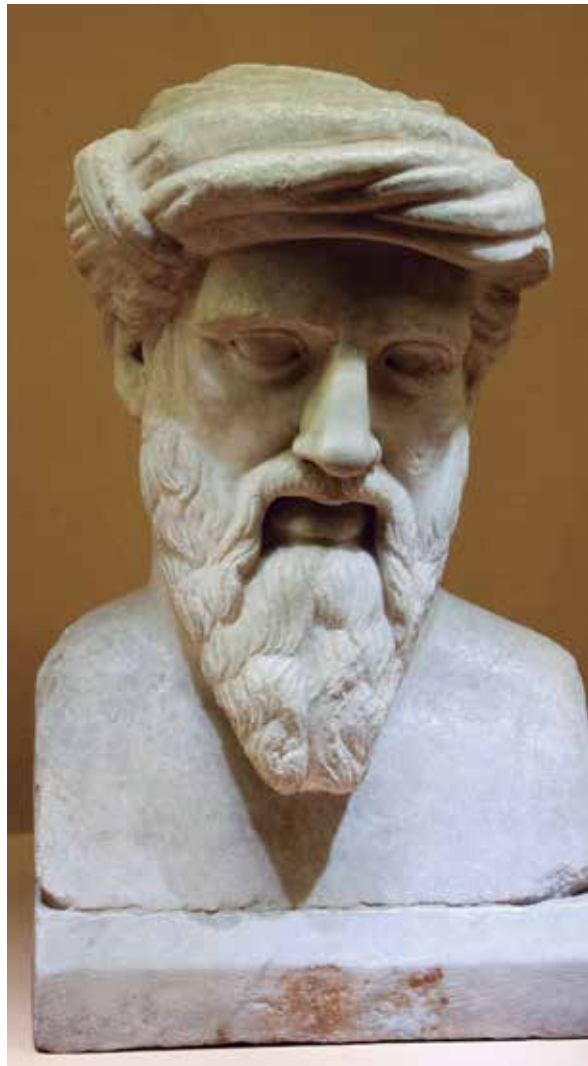
Imagen tomada de: <https://goo.gl/PlaUlu>

de buscar respuestas en la acción de uno o varios dioses o seres supremos, sino de fijar y establecer principios y procesos inteligibles, que expliquen el origen y multiplicidad de lo real existente y den razón de los múltiples fenómenos observables.

En este sentido, Tales —históricamente el primero de ellos—, habla del agua como el elemento original, que a partir de procesos físicos puede adoptar los tres estados (sólido, líquido y gaseoso) y generar así la multiplicidad de cuerpos u objetos reales, conservando siempre su naturaleza inmutable, de la que no participan los objetos perecederos generados por ella. Al respecto nos dice Aristóteles: «La mayoría de los que filosofaron por primera vez consideraron que los únicos principios de todas las cosas son de especie material. Aquello a partir de lo cual existen todas las cosas, lo primero a partir de lo cual se generan y el término en que se corrompen, permaneciendo la sustancia mientras cambian los accidentes, dicen que es el elemento y el principio de las cosas que existen; por esto consideran que nada se genera ni se corrompe, pues tal naturaleza se conserva siempre... Debe de haber, pues, alguna naturaleza única o múltiple a partir de la cual se generan las demás cosas, conservándose ella. No todos dicen lo mismo sobre el número y la especie de tal principio, sino que Tales, quien inició semejante filosofía, sostiene que es el agua».

Por lo que toca a Anaximandro, discípulo de Tales, «El principio ... de todas las cosas es lo infinito, y fue el primero que introdujo este nombre de “principio”». Me parece que el siguiente texto de Aristóteles puede arrojar cierta luz en este contexto: «Cualquier cosa es un principio o procede de un principio. Ahora bien, de lo infinito no hay principio, ya que [ese] sería un límite. Además, como principio, es inengendrado e indestructible, pues lo engendrado alcanza necesariamente un fin, y hay un término para toda destrucción. Por eso, según afirmamos, no hay principio de él sino que él parece serlo de lo demás y “abarca a todas las cosas y a todas gobierna”, como dicen aquellos que no admiten junto a lo infinito, otras causas tales como el intelecto y la amistad. Y esto es “lo divino”, pues, “es inmortal e imperecedero”, como dicen Anaximandro y la mayoría de los físicos».

Con lo dicho hasta ahora, es claro que estamos ante una actitud respecto de las preguntas por el origen y la racionalidad de lo real, donde ya no se trata de remitirse a ciertos seres omnipotentes cuya voluntad crea y ordena todo cuanto existe, sino de establecer principios y procesos que permitan dar razón de lo real y construir un nuevo tipo de conocimiento.



■ Busto de Pitágoras en los Museos Capitolinos. Tomada de Wikipedia.

Es hora a ocuparnos del filósofo presocrático más relevante para nuestro estudio debido particularmente a su importancia en el ámbito de las matemáticas y la música.

Pitágoras

Lo más sorprendente de la Ciencia Moderna es su vuelta al pitagorismo.

Bertrand Russell

Personaje enigmático nacido en Samos en el siglo VI a. n. e., a quien se atribuye la invención de la palabra *filosofía* y el liderazgo de una hermandad de gran importancia en la construcción de esa nueva concepción del mundo iniciada por los milesios. Para los pitagóricos, en el origen de todo están los números, y «El caos primitivo, carente de orden y de forma y de todo cuanto es diferenciador de acuerdo con las categorías de la calidad, cantidad, etcétera, fue organizado y ordenado según el número». Este tipo de afirmaciones cobraron sentido «real» en el ámbito de la música, según se expone en la siguiente historia.

Pitágoras empleó también el método experimental. A poco de llegar a Crotona, y pasando en cierta ocasión ante una herrería, le atrajo la cadencia producida por los martillazos que daban cuatro esclavos sobre el yunque para trabajar un trozo de hierro. Tres martillos golpeaban al mismo ritmo y el otro no. Creyendo que las notas emitidas eran proporcionales a la fuerza de los hombres, les rogó que intercambiasen los martillos, y como el resultado fuese el mismo, dedujo que aquellas sólo dependían del peso de éstos, que, a petición suya, el herrero le prestó por unas horas, brevísimo tiempo durante el cual, dice Bell, «orientó el curso de la civilización occidental hacia un fin en el que nadie había pensado hasta entonces».

Llegado a casa de Milón, el Maestro hizo la primera experiencia de laboratorio que registra la historia. Pesó los martillos y los ató en los extremos de sendas cuerdas de igual longitud que, al pulsarlas, emitieron sonidos idénticos a los producidos cuando golpeaban el yunque, coincidiendo los tres consonantes con los de la lira de Orfeo ... Hizo después otra experiencia: pero en vez de emplear cuerdas de igual longitud y pesos distintos, operó con pesos iguales para tensar cuerdas de distinta longitud, y observó que las [cuerdas] que daban una nota, su cuarta, su quinta y su octava, tenían longitudes proporcionales a 12, 9, 8 y 6, es decir, el mismo resultado que antes; y puesto que las razones entre estos números son iguales a las que hay entre $1, 3/4, 2/3$ y $1/2$, que son las más sencillas que se pueden formar con 1, 2, 3 y 4, dedujo que el tetracto era la fuente de la eterna naturaleza, como dicen los Versos dorados.

Pitágoras observó también que en lugar de cuatro cuerdas de longitudes proporcionales a 1, $3/4, 2/3$ y $1/2$, podía emplear una cuerda única si conseguía que sólo vibrasen sus $3/4$ partes para obtener la cuarta, $2/3$ para la quinta y $1/2$ para la octava, lo que le condujo a dos inventos notables: el monocordio y la escala musical que es la siguiente:

<i>do</i>	<i>re</i>	<i>mi</i>	<i>fa</i>	<i>sol</i>	<i>la</i>	<i>si</i>	<i>do</i>
1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2

■ Citas de Nicómaco de Gerasa, tomadas de: *Filosofía y mística del número* de Matila Ghyca C.

He optado por esta larga cita para ubicar el contexto de lo dicho en el último párrafo, donde entre otras cosas se nos dice que si tensamos una cuerda y a su longitud le asignamos la unidad, sus armónicos principales (la cuarta o subdominante, la quinta o dominante y la octava) están

asociados con las fracciones: $4/3, 3/2$ y $1/2$ de su longitud, y en estas fracciones sólo intervienen los primeros cuatro números naturales, que son los que intervienen en la «Tetraktys, cuarto número triangular, pero también símbolo figurado de la importantísima Década (número diez)».



■ El arpa de Orfeo. Instrumento de cuerdas usado en Grecia. Orfeo es representado en un mosaico romano. Museo Arqueológico Regional de Palermo. Imagen tomada de: <https://es.wikipedia.org/wiki/Orfeo>

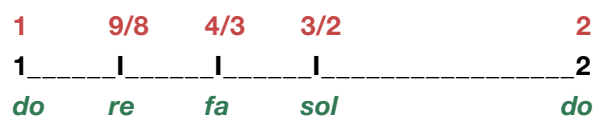
Construcción de la escala pitagórica

Veamos ahora una construcción de la escala mostrada antes, obtenida por Pitágoras de forma experimental, a partir de una cuerda de dos unidades de longitud. Partiremos de que a la nota original le llamaremos *do*, a la cuarta *fa*, a la quinta *sol* y a la octava *do*, considerando además las fracciones asociadas a cada una de ellas, lo que gráficamente veremos como:

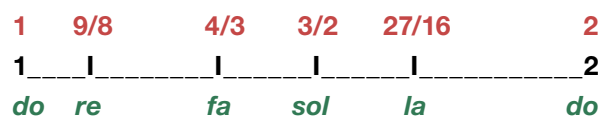


Para obtener las fracciones asociadas con las notas restantes la idea es calcular quintas en forma secuencial; esto es, sabemos que la quinta de *do*, que tiene asociado el 1 es *sol* y tiene asociada la fracción $3/2=1 \times 3/2$, de donde, la quinta de *sol*—que tiene asociada la fracción $3/2$ —, será $3/2 \times 3/2=9/4$ y como se trata de un valor mayor que 2 y sabemos que su octava se obtiene dividiendo por 2 entonces tomamos $(9/4)/2=9/8$, que


es mayor que 1 y menor que 2. A la nota asociada con esta fracción la llamamos *re*, con lo que nuestra gráfica queda ahora como sigue:



Ahora, para calcular la siguiente nota, calculamos la quinta de *re*—cuya fracción asociada es $9/8$ —, por lo que, procediendo de forma análoga a lo hecho antes obtenemos: $9/8 \times 3/2=27/16$ y llamamos *la* a la nota asociada a esta fracción. Con esto, la gráfica actualizada es:



Te invito amigo lector, a calcular las fracciones asociadas a las notas *mi* y *si*, y a dibujar la gráfica completa.

Es importante señalar que las ideas acerca de los sonidos musicales y sus armónicos ya eran conocidas en los tiempos de Pitágoras. La originalidad de éste consistió en descubrir mediante experimentos guiados por la razón, que detrás de los sonidos musicales hay números, lo que representó una confirmación de la idea pitagórica de que en el origen de lo real (en este caso los sonidos, que son parte de lo real-sensible), están los números, descubrimiento que dio origen a los fundamentos de la primera teoría matemática de la música y llevó a plantear una especie de sinfonía universal o música de las esferas, donde cada cuerpo cósmico está asociado a una nota musical. 

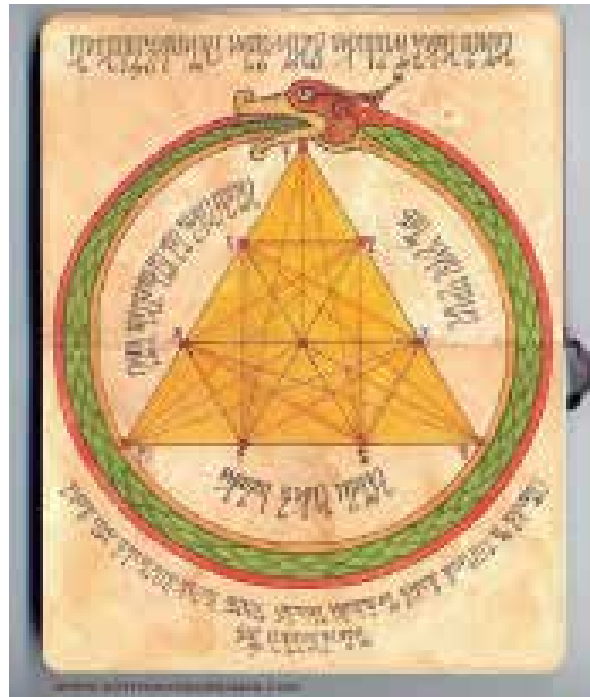
José Guerrero Grajeda. Profesor de la Facultad de Ciencias de la UNAM.

Notación musical:

- La escala pitagórica mostrada aquí consta de 7 notas, el *do* al final es una repetición del inicial. Como la escala inicia en *do*, la «distancia» con respecto a *re* se llama segunda; con respecto a *mi*, tercera; con *fa*, cuarta; con *sol*, quinta; con *la*, sexta; con *si*, séptima; y con el siguiente *do*, octava. Este mismo esquema se aplica si se parte de cualquiera otra nota; por ejemplo, si se parte de *sol*, la tercera de *sol* es *si* (pues en: *sol-la-si*, intervienen tres notas) y la quinta es *re* (*sol-la-si-do-re* = cinco notas). También vale la pena anotar que a la cuarta se le llama subdominante y a la quinta dominante.
- Estos nombres de las notas son los actuales y constituyen una leve variante de los asignados a ellas por Guido de Arezzo en el siglo *xi* a partir de las primeras sílabas de los versos de un himno dedicado a San Juan.

Glosario:

- **Nicómaco de Gerasa** (siglo *i* d. n. e.) Autor de *Introducción a la aritmética*, un tratado filosófico-matemático de gran influencia durante diez siglos donde aborda la teoría de números.
- **Milón.** Extraordinario atleta olímpico nacido en Crotona en el siglo *vi* a. n. e., discípulo de Pitágoras.
- **Tetraktys, tetrada, tetractys** de la década. es una figura triangular que consiste en diez puntos ordenados en cuatro filas, con uno, dos, tres y cuatro puntos en cada fila. Muy importante en el pensamiento pitagórico: hay cuatro estaciones, cuatro elementos; el símbolo fue asociado al movimiento planetario y a la música.



■ Tetraktys. Imagen tomada de: <https://goo.gl/Sf7zeg>

Referencias:

- Lan, C. Eggers y Juliá, V. E. (1981) Introducciones, traducciones y notas, *Los filósofos presocráticos*, Editorial Gredos, S. A., España.
- Vera, Francisco (1970) Recopilación, estudio preliminar, preámbulos y notas, *Científicos Griegos*, Ediciones Aguilar, S. A., España.
- Ghyca, Matila C. (1998), *Filosofía y mística del número*, Ediciones Apóstrofe, S. L., España.
- Alexandre, Enrique. *Pitágoras, las matemáticas y la música*.
- <http://enriquealexandre.es/2013/02/20/pitagoras-las-matematicas-y-la-musica/>

Para saber más:

- Bonnefoy, Yves, Director general (1996) *Diccionario de las mitologías*, Ediciones Destino, S. A., España
- Eliade, Mircea (1996), *Historia de las creencias y las ideas religiosas*, Editorial Herder, S. A., España,.
- Martínez, J. Luis (1988) *El Mundo Antiguo*, Seis tomos, Secretaría de Educación Pública, México.
- Sarukán, José y León-Portilla, Miguel (2011) *Pensar la vida*, Coedición: El Colegio Nacional/Ediciones Era, México.
- Godwin, Jocelyn (2009) *Introducción y edición. Armonía de las esferas*, Ediciones Atalanta, España.